☑ Νδο η εξίσωση $(x+1)\cdot 2^{x+1}=1$ έχει ακριβώς μία αρνητική πραγματική ρίζα και μάλιστα μεγαλύτερη του -1.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Εστω η συνάρτηση $f(x)=(x+1)2^{x+1}-1$

Η f συνεχής στο $[-1,0]$ ως πράξεις συνεχών

$f(-1)=-1<0$ και $f(0)=1>0$

Αρα, εκ του θεωρήματος Bolzano θα υπάρχει ένα $x_0\in(-1,0)$: $f(x_0)=0 \Rightarrow (x_0+1)2^{x_0+1}=1$

<u>α' τρόπος</u>: Αποδεικνύουμε ότι f γνησια αυξουσα και άρα το x_0 μοναδικο.

<u>β' τρόπος</u>: Εστω υπαρχει 2η ρίζα στο $(-1,0)$ δηλαδή $\exists\, \theta\in(-1,0)$: $f(\theta)=0 \Rightarrow (\theta+1)2^{\theta+1}=1$

Τότε, $(\theta+1)2^{\theta+1}=(x_0+1)2^{x_0+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\theta+1}{x_0+1}=\frac{2^{x_0+1}}{2^{\theta+1}} \Rightarrow \frac{\theta+1}{x_0+1}=2^{x_0-\theta} \quad (1)$$

• Αν $x_0<\theta \Rightarrow x_0-\theta<0$ τοτε $\frac{\theta+1}{x_0+1}<1 \xRightarrow{x_0>-1} \theta+1<x_0+1 \Rightarrow \theta<x_0$ Ατοπο

• Αν $x_0>\theta \Rightarrow x_0+1>\theta+1 \xRightarrow{x_0>-1} \frac{\theta+1}{x_0+1}>1$ (*)

Αλλά $x_0>\theta \Rightarrow x_0-\theta>0$ άρα, $2^{x_0-\theta}>1$ (**)

Απο (*), (**) ατοπό

Αρα, αναγκαστικά $x_0=\theta$.